Questo breve compendio guida il lettore tra le regole e i modelli basilari della matematica, e fornisce gli strumenti con cui impostare e risolvere problemi logici e di calcolo. Le parti discorsive del compendio usano un linguaggio spiccio per facilitare la comprensione dei concetti matematici.

Indice

ALGEBRA

Lettere e segni

Il linguaggio matematico usa simboli grafici per esprimere concetti. Le lettere rappresentano numeri: le prime dell'alfabeto rappresentano i dati (fissi già conosciuti all'inizio del problema); le ultime dell'alfabeto rappresentano le incognite (da calcolare per ottenere una soluzione) o le variabili (numeri mutevoli, ma che hanno un rapporto costante con gli altri numeri del problema); le lettere greche rappresentano entità particolari (costanti, funzioni, ecc.). Le parentesi raccolgono operazioni che bisogna eseguire prima delle altre. I segni rappresentano la relazione che lega i numeri fra loro: moltiplicare (punto centrale · o contiguità di due lettere, come *xy*), maggiore di (>), ecc. Moltiplicazioni e divisioni hanno la precedenza su somme e sottrazioni. Gli operatori di somma (+) e sottrazione (–) attribuiscono valore positivo o negativo ai numeri e rispettano le regole seguenti (p.es. la moltiplicazione di due numeri negativi rende un numero positivo):

$x-y=0 \leftrightarrow x=y$ $\quad$ $x-y>0 \leftrightarrow x>y$ $\quad$ $x-y<0 \leftrightarrow x<y$ $\quad$ $-x>y \leftrightarrow x<-y$

$(x)(y)=z$ $\quad$ $(-x)(-y)=z$ $\quad$ $(x)(-y)=-z$ $\quad$ $\frac{x}{y}=z$ $\quad$ $\frac{x}{-y}=-z$

Moltiplicazioni

$(a+b+c)m = am+bm+cm$ $\quad$ $(a+b)(c+d+m) = ac+ad+am+bc+bd+bm$

Divisioni

$\frac{a}{b}=c \leftrightarrow cb=a$ $\quad$ $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ $\quad$ $a\frac{b}{a}=b$ $\quad$ $\frac{a}{b}=a\frac{1}{b}$

$\frac{a+b+c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}$ $\quad$ $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ $\quad$ $\frac{abc}{m}=\frac{a}{m}bc=a\frac{b}{m}c=ab\frac{c}{m}$ $\quad$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

Massimo Comun Divisore

Il MCD di due o più numeri raccoglie i loro termini comuni espressi con l'esponente più piccolo. L'unità (1) può essere ignorata dall'insieme dei termini comuni perché non incide sul risultato del calcolo.

	numero		*divisore minimo*		*numero*		*divisore minimo*	
	8	⋮	2		**20**	⋮	2	
$MCD(8, 20) \rightarrow$	4	⋮	2	$\mathbf{2^3}$;	10	⋮	2	$\mathbf{2^2 \cdot 5} \rightarrow MCD(8, 20) = 2^2$
	2	⋮	2		5	⋮	5	
	1	⋮	1		1	⋮	1	

$MCD(a, b) \rightarrow \frac{a}{b}=c, w_{resto} \rightarrow \frac{b}{w}=c_1, w_1 \ \ldots \ \frac{w_{n-1}}{w_n} \rightarrow w_{n-1} = MCD(a, b)$

Minimo Comune Multiplo

Il *mcm* di due o più numeri raccoglie i loro termini comuni e non comuni espressi con l'esponente maggiore.

$$mcm(a,b)=\frac{ab}{MCD(a,b)}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{\frac{mcm(b,d)}{b}a+\frac{mcm(b,d)}{d}c}{mcm(b,d)}$$

Potenze e logaritmi

La potenza di un numero (base) lo moltiplica per se stesso tante volte quante indicato dall'esponente. La potenza ha precedenza sulle altre operazioni, a meno che una parentesi separi la base dall'esponente.

$a^3 = a{\cdot}a{\cdot}a$ $\quad a^1 = a$ $\quad a^0 = 1$ $\quad (-a)^3 = -x$ $\quad (-a)^2 = x$ $\quad -a^2 = -x$

$(abc)^n = a^n b^n c^n$ $\quad (abc)^{-n} = a^{-n}b^{-n}c^{-n}$ $\quad a^m a^n a^p = a^{m+n+p}$ $\quad (a^m)^n = a^{mn}$

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ $\quad \left(-\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(-\frac{b}{a}\right)^n$ $\quad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ $\quad x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$ $\quad x^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$

$a^x = y \quad \rightarrow \quad x = \log_a y$ $\quad b^{\log_b x}=x$ $\quad \log_b x=\frac{1}{\log_x b}$ $\quad \log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$

$\log_a(m{\cdot}n) = \log_a m+\log_a n$ $\quad \log_a\frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$ $\quad \log_a m^n = n{\cdot}\log_a m$ $\quad \log_a a = 1$

Espressioni

$$a+\frac{b}{c}(a^2+c)-dc+db=...$$

$$4+\frac{1}{2}(3{\cdot}2)-\frac{4}{2}+6=4+\frac{1}{2}6-2+6=4+3-2+6=11$$

Monomi

Riduzione: $-3ab5a^3 2b^4 c = (-3{\cdot}5{\cdot}2)(a^{1+3})(b^{1+4})c = -30a^4b^5c$

Addizione: $10a^2b + 14abc - 3a^2b - 4abc = 7a^2b + 10abc$

Moltiplicazione: $(5ab^2)(-3a^2bc^3)(-bc^2) = 5(-3)(-1)(aa^2)(b^2bb)(c^3c^2) = 15a^3b^4c^5$

Divisione: $\frac{8a^3b^5}{2ab^4}=\frac{8}{2}\cdot\frac{a^3}{a}\cdot\frac{b^5}{b}=4a^2b$

Potenza: $(-2a^2bc^3)^3 = (-2)^3(a^2)^3b^3(c^3)^3 = -8a^6b^3c^9$

MCD: $-8a^3b^4c^5$; $\quad 6ab^2c^4d$; $\quad -10a^4b^5c^2m$; $\rightarrow 2ab^2c^2$ (i termini comuni col più piccolo esponente).

mcm: $-8a^3b^4c^5$; $\quad 6ab^2c^4d$; $\quad -10a^4b^5c^2m$; $\rightarrow -120a^4b^5c^5dm$ (i termini col maggiore esponente).

Polinomi

$ax^4+a^2x^3+a^6x^2+x+1$: polinomio di 4 termini, completo e ordinato rispetto a x, con il termine di grado 0 (x^0).

Moltiplicazione: $3a(m+n) = 3am+3an$. $\quad (-2xy^2)(3x^3-7x^2y^4) = -6x^4y^2+14x^3y^6$

$(2a+3b)(m-n) = 2am-2an+3bm-3bn$

$\boldsymbol{(a+b)(a-b)} = a^2-ab+ba-b^2 = \boldsymbol{a^2-b^2}$ $\quad (a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2-c^2$

Divisione: $$\frac{12a^5b^3c^4-9a^6b^4c^{10}m-2a^4b^6c^5}{3a^2bc^3}=4a^3b^2c-3a^4b^3c^7m-\frac{2}{3}a^2b^5c^2$$

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y \qquad \frac{x^2-y^2}{x+y}=x-y \text{ solo se la potenza è pari.}$$

$$\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2 \qquad \frac{x^3-y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2 \text{ solo se la potenza è dispari.}$$

$$\frac{x^4-y^4}{x-y}=x^3+xy^2+x^2y+y^3 \qquad \frac{x^4-y^4}{x+y}=x^3-x^2y+xy^2-y^3$$

$$\frac{x^5-y^5}{x-y}=x^4+xy^3+x^2y^2+x^3y+y^4 \qquad \frac{x^5-y^5}{x+y}=x^4-xy^3+x^2y^2-x^3y+y^4$$

Ruffini: $$\frac{5x^3-13x^2+10x-1}{x-2} = \begin{array}{c|ccc|c} & +5 & -13 & +10 & -1 \\ +2 & & +10 & -6 & +8 \\ \hline & +5 & -3 & 4 & 7 \end{array} = 5x^2-3x+4 \text{ ; resto} = 7$$

Il polinomio deve essere trascritto completo (se manca un termine per una x^n si scrive 0).

Quadrato: $\boldsymbol{(a+b)^2} = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = \boldsymbol{a^2+2ab+b^2}$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$(2a+3a^2b-5b^3)^2 = 4a^2+9a^4b^2+25b^6+12a^3b-20ab^3-30a^2b^4$

Cubo: $\boldsymbol{(a+b)^3} = (a+b)(a+b)(a+b) = \boldsymbol{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(2xy^3+3x^2)^3 = (2xy^3)^3+3(2xy^3)^2(3x^2)+3(2xy^3)(3x^2)^2+(3x^2)^3 =$

$= 8x^3y^9+3(4x^2y^6)3x^2+3(2xy^3)(9x^4)+27x^6 = 8x^3y^9+36x^4y^6+54x^5y^3+27x^6$

$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$

Potenze: $(a+b)^n = a^n+triangolo\text{-}di\text{-}Tartaglia+b^n \qquad (a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

Tartaglia:

```
                                1
                             1     1
                          1     2     1    (quadrato)
                       1     3     3     1       (cubo)
                    1     4     6     4     1    (quarta potenza)
                 1     5    10    10     5     1       (quinta potenza)
              1     6    15    20    15     6     1    (sesta potenza)
           1     7    21    35    35    21     7     1       (settima potenza)
        1     8    28    56    79    56    28     8     1    (ottava potenza)
```

Scomposizione in fattori: 1) si cerca il MCD; 2) si divide il polinomio per il MCD;

3) si mette in evidenza il MCD, scrivendo tra parentesi il risultato della divisione.

$2a^3-10a^2b+12a^4 = 2a^2(a-5b+6a^2)$

A^2+B^2 non si può decomporre.

$A^2-B^2 = (A-B)(A+B)$

$A^3+B^3 = (A+B)(A^2–AB+B^2)$

$A^3–B^3 = (A–B)(A^2+AB+B^2)$

A^4+B^4 non si può decomporre.

$A^4–B^4 = (A^2–B^2)(A^2+B^2) = (A–B)(A+B)(A^2+B^2)$

$$\frac{3}{ab}+\frac{4a}{bc}=\frac{3c}{abc}+\frac{4a^2}{abc}=\frac{3c+4a^2}{abc}$$

Equazioni di primo grado (lineari)

Un'equazione indica che i termini rappresentati a sinistra del segno = hanno una relazione costante con i termini rappresentati alla sua destra. Invertire la posizione dei termini, rispettando le regole dei segni, mantiene invariato il risultato della relazione. Isolare una variabile o un'incognita, a sinistra o a destra del segno =, individua l'operazione o la serie di operazioni da eseguire per calcolarne il valore.

$ax = b \rightarrow x=\frac{b}{a}$; se $a = 0 \rightarrow x=\frac{b}{0}$ impossibile; se $a = b = 0 \rightarrow x=\frac{0}{0}$ indeterminata.

$5–x = 1+x \rightarrow 5–1 = x+x \rightarrow 4 = 2x \rightarrow x=\frac{4}{2} \rightarrow x = 2$

$$\frac{x-1}{x}-\frac{3}{2x}=\frac{7}{4} \rightarrow mcm(x, 2x, 4) = 4x \rightarrow 4x\left(\frac{x-1}{x}\right)-4x\left(\frac{3}{2x}\right)=\left(\frac{7}{4}\right)4x \rightarrow 4(x–1)–2(3) = 7x$$

$$\rightarrow 4x – 4 – 6 = 7x \rightarrow –10 = 3x \rightarrow x = -\frac{10}{3}$$

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b} \leftrightarrow bx = ya$$

$$x = a+bx+c \rightarrow x–bx = a+c \rightarrow x(1–b) = a+c \rightarrow x=\frac{a+c}{1-b}$$

Proporzioni

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{c} \rightarrow x=\frac{ac}{b} \qquad\qquad \frac{x}{a}=\frac{b}{c} \rightarrow x=\frac{ab}{c}$$

Equazioni di secondo grado (quadratiche)

$ax^2+bx+c = 0 \rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Discriminante: $\Delta = b^2–4ac$

Se $\Delta > 0$, esistono 2 soluzioni distinte.
Se $\Delta = 0$, esistono 2 soluzioni coincidenti $x_1 = x_2$.
Se $\Delta < 0$, esistono 2 soluzioni complesse e coniugate.

$ax^2+bx+c = a(x–x_1)(x–x_2)$ Nella forma semplice: $ax^2+bx = 0 \rightarrow x(ax+b) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2=-\frac{b}{a}$

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ $x_1 x_2=\frac{c}{a}$ $x^2-(x_1+x_2)x+x_1 x_2=0$

GRAFICI

I grafici in 2 dimensioni rappresentano la relazione matematica (equazione) tra 2 incognite. L'asse orizzontale di un grafico rappresenta di solito i valori assunti dalla variabile x, mentre l'asse verticale rappresenta quelli assunti dalla y. Le equazioni di I grado esprimono rette, quelle di II grado esprimono curve. Ogni punto P di una retta (o curva) ha 2 coordinate numeriche: $P(x, y)$.
Due punti noti $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ individuano una retta con equazione:

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \rightarrow x=\frac{(y-y_0)(x_1-x_0)}{y_1-y_0}+x_0$$

Ogni equazione si può riportare in un grafico, assegnando 2 valori arbitrari a x dopo aver risolto l'equazione isolando la y per ottenere le coordinate: $x-y+1 = 0 \rightarrow y = x+1 \rightarrow$ *quando* $x = 0$, $y = 0+1$, etc…

$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$ …	$x = n$
$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$ …	$y = n+1$.

Due punti arbitrari del grafico saranno $A(0, 1)$ e $B(1, 2)$.

Coefficiente angolare (derivata): $m=-\frac{y_0}{x_0}$ (retta passante per l'origine degli assi); $m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ (altre rette).

Equazione della retta passante per un punto (fascio di rette): $y-y_0 = m(x-x_0)$

Coordinate del punto medio di un segmento: $x_M=\frac{x_0+x_1}{2}$; $y_M=\frac{y_0+y_1}{2}$

Distanza tra due punti: $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$

Parabola: $y = ax^2+bx+c$.

Nella forma $ax^2+bx+c = 0$ le soluzioni x_1 e x_2 sono i punti in cui la parabola tocca l'asse delle Y (cioè $y = 0$).
Date le coordinate d'intersezione della parabola con gli assi X e Y, si può trovare:

$$P_X(x_0, 0) \text{ e } P_Y(0, y_0) \rightarrow y=-\frac{y_0}{x_0}x^2+y_0$$

Ellisse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c \rightarrow y=\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2}$; fuochi dell'ellisse: (a, b); area dell'ellisse: c.

Cerchio: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=c$

SISTEMI

Un sistema di 2 equazioni di I grado in 2 variabili (x e y) individua il punto d'intersezione delle 2 rette.

Sostituzione: $\begin{cases}x=2y-3\\4x-y-2=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=2y-3\\4(2y-3)-y-2=0\end{cases}$ $\begin{matrix}\dots\\\dots\end{matrix}$ $\begin{cases}x=2y-3\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=4-3\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

Confronto: $\begin{cases}x=y-3\\x+y-1=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=y-3\\x=1-y\end{cases}$ $\begin{cases}1-y=y-3\\x=1-y\end{cases}$ $\begin{cases}2y=4\\x=1-y\end{cases}$ $\begin{cases}y=2\\x=1-2\end{cases}$ $\begin{cases}y=2\\x=-1\end{cases}$

MATRICI

$A_{m,n}$: un insieme di numeri ordinati per m righe e n colonne (matrice A di ordine n).

$a_{i,j}$: un elemento di $A_{m,n}$ che si trova alla riga i e alla colonna j. $a_{i,i}$ = elemento della diagonale.

$m = n$: matrice quadrata. $A_{1,n}$: vettore riga. $A_{m,1}$: vettore colonna.

$A_{2,2}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ matrice quadrata di secondo ordine. $A_{1,3}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \end{bmatrix}$ vettore riga.

Traccia: $tr(A_{m,n}) = a_{i,i}+a_{j,j} \ldots +a_{m,n}$: somma degli elementi della diagonale. $tr(A_{2,2}) = a_{1,1}+a_{2,2}$.

Determinante: $\partial A_{2,2} = a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}$ (differenza dei prodotti degli elementi delle due diagonali);
$\partial A_{3,3} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}-a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1}-a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2}$

$$\partial A_{3,3} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}\right.$$

Regola di Sarruss (solo per $A_{3,3}$):
si scrivono di fianco alla matrice le prime due colonne.

Il valore di un determinante resta uguale se si scambiano le righe con le colonne.
Lo scambio di due righe o di due colonne di un determinante equivale a cambiarne il segno.
Moltiplicare tutta una riga o tutta una colonna per k equivale a $\partial A_{m,n}k$.
Se tutti gli elementi di una riga o di una colonna sono nulli (0) il $\partial A_{m,n} = 0$.

Somma di matrici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Moltiplicazione di una matrice per uno scalare k: $kA_{m,n}$:

$$2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 8 & 2\cdot(-3) \\ 2\cdot 4 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Regola di Cramer:

per un sistema di equazioni a due incognite $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ c'è una soluzione solo se $\partial\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\neq 0$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \rightarrow x=\frac{\partial\begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\partial\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}=\frac{ed-fb}{ad-cb} \qquad y=\frac{\partial\begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\partial\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}=\frac{af-ce}{ad-cb}$$

per un sistema di equazioni a tre incognite: $\begin{cases} ax+by+cz=j \\ dx+ey+fz=k \\ gx+hy+iz=l \end{cases}$ c'è una soluzione solo se $\partial\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\neq 0$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix} \rightarrow x=\frac{\partial\begin{bmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{bmatrix}}{\partial\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}} \qquad y=\frac{\partial\begin{bmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{bmatrix}}{\partial\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}} \qquad z=\frac{\partial\begin{bmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{bmatrix}}{\partial\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}$$

Moltiplicazione tra 2 matrici (A e B) solo se il numero di righe di B coincide col numero di colonne di A:
$A_{m,n}\cdot B_{n,p} = C_{m,p}$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1}+a_{1,3}b_{3,1})(a_{1,1}b_{1,2}+a_{1,2}b_{2,2}+a_{1,3}b_{3,2}) \\ (a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{2,1}+a_{2,3}b_{3,1})(a_{2,1}b_{1,2}+a_{2,2}b_{2,2}+a_{2,3}b_{3,2}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3+0+2) & (1+0+0) \\ (-3+6+1) & (-1+3+0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Sommatorie

Risultato della somma di una serie di numeri: $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ sommatoria di *f*(*i*) al variare di *i* da *m* a *n*.

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{n-1} + x_n \leftarrow \sum_{i=4}^{10} i^2 = 4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2 \leftarrow \sum_{i=1}^{3} ia = a+2a+3a$$

Se il numero di addendi è infinito ($n = \infty$) la sommatoria è detta *serie*.

Proprietà: $\sum_{i=m}^{n} ax_i = a\sum_{i=m}^{n} x_i \rightarrow \sum_{i=1}^{3} 2x_i = 2x_1+2x_2+2x_3 \rightarrow \sum_{i=1}^{3} 2x_i = 2(x_1+x_2+x_3)$

$\sum_{i=m}^{n} a = na \rightarrow \sum_{i=1}^{3} a = 3a$

$\sum_{i=m}^{n} a_i + b_i = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$ la sommatoria di una somma è la somma delle sommatorie.

$\sum_{i=m}^{n} a + x_i = na + \sum_{i=m}^{n} x_i$

$\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=p}^{q} x_{i,j} = x_{m,p} + x_{m+1,p+1} + \ldots + x_{n-1,q-1} + x_{n,q}$

$\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=p}^{q} x = nqx$

ANALISI

OPERAZIONI TRA FUNZIONI

Una funzione (f) esprime una relazione di dipendenza (causa-effetto) tra grandezze che segue la logica delle equazioni. Scrivere $f(x) = 6x–1$ equivale a dire $y = 6x–1$, cioè che y varia in funzione del variare di x.

Addizione: $f(x) = 6x–1$; $g(x) = 7x^3–3x–2$; $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 6x–1+7x^3–3x–2 = 7x^3+3x–3$

Moltiplicazione: $f(x) = x$; $g(x) = (x–1)(x+1)$; $(fg)(x) = f(x)\cdot g(x) = x(x–1)(x+1) = x^3–x$

Divisione: $f(x) = x$; $g(x) = (x+1)(6–x)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x}{(x+1)(6-x)}=\frac{x}{5x-x^2+6}$

LIMITE

Il limite numerico che la funzione non può superare, ma a cui si avvicina sempre di più mano a mano che l'argomento si avvicina a 0, a ∞ o a qualsiasi altro numero n. P.es. il limite di $\frac{1}{n}$ con n che tende a ∞ è 0 perché il risultato di $\frac{1}{n}$ sarà sempre più vicino a 0, mano a mano che il valore di n aumenta.

$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ se $x\in I(x_0)$ tale che $|f(x)-l|<\epsilon$ (x_0 è un numero finito; l è il limite finito; ϵ è un numero a piacere maggiore di 0, ma molto piccolo);

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ se $x\in I(x_0)$ tale che $|f(x)|>K$ (K è un numero a piacere maggiore di 0, ma molto grande);

$\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ se $x\in I(a+\infty)$ tale che $|f(x)-l|<\epsilon$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ se $x\in I(a+\infty)$ tale che $|f(x)|>K$

DERIVATA

Una derivata descrive come varia il valore di un'incognita (solitamente la y) di una funzione al variare del valore dell'altra incognita (solitamente la x).

Indichiamo la variazione con la lettera greca δ:

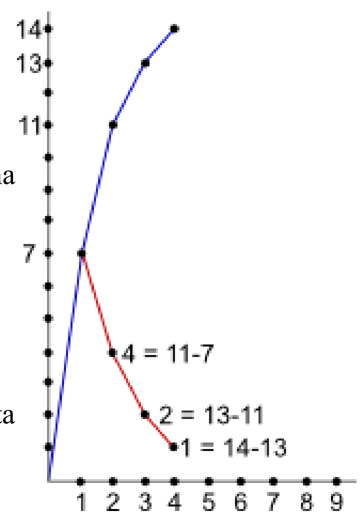
$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

La derivata esprime il coefficiente angolare misurato dalla tangente al grafico di una funzione.

$f'(ax) = a$. $f'(x^n) = nx^{n-1}$. $f'(\sqrt[n]{x})=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$f(x) = 15x+4x^2+9yx \rightarrow f'(x) = 15+4(2x)+9y \rightarrow f'(x) = 15+8x+9y$.

Il grafico della derivata (curva rossa) di una funzione (curva blu) rappresenta sull'asse verticale i valori δy e sull'asse orizzontale i valori δx.



ESTREMI DI UNA FUNZIONE

$f(x_0) \leq f(x)$: una funzione ha un *minimo* in x_0 se in x_0 assume un valore inferiore o uguale a quello che assume in qualsiasi altro punto (x).

$f(x_0) \geq f(x)$: una funzione ha un *massimo* in x_0 se in x_0 assume un valore maggiore o uguale a quello che assume in qualsiasi altro punto (x).

Un punto x_0 è *max* o *min* della funzione se la derivata prima si annulla in quel punto (x_0): $f'(x_0)=0$

Per trovare gli estremi *min* e *max*:

1) estrarre la derivata prima della funzione: $f'(x)$
2) porre la derivata uguale a zero: $f'(x)=0$
3) risolvere l'equazione della derivata per trovare i punti estremali:
   - ove $f'(x)>0$ la funzione è crescente;
   - ove $f'(x)<0$ la funzione è decrescente;
   - ove $f'(x)=0$ la funzione inverte il proprio valore (punto di flesso).

Es: $y = 3x^2-6x-8$ $\quad y' = -6x-6$ $\quad 0 = -6x-6$ $\quad 6x = -6$ $\quad x = -1$

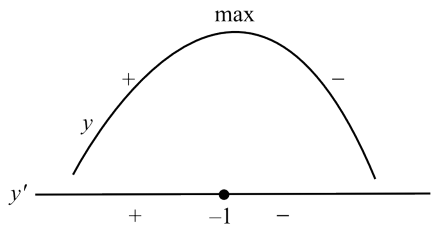
quindi $P(-1, y)$; $\rightarrow$ $y = -3(-1)^2-6(-1)-8$

$y = -3+6-8$ $\rightarrow$ $y = -5$

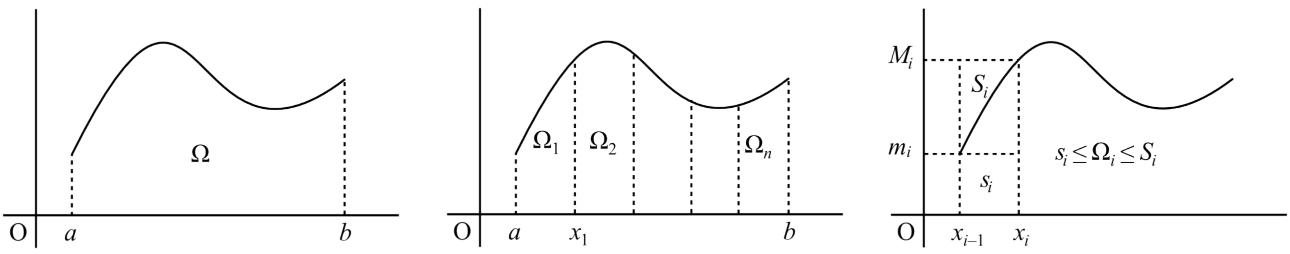
quindi $P(-1, -5)$ è un estremo.

$-6x-6 > 0$ (ci chiediamo quando y' assuma valori positivi).

$x < -1$: per valori di x minori di -1 (verso sinistra) la derivata è crescente e $P(-1, -5)$ è un *max*.



INTEGRALE



Un integrale ($\int$)è l'area compresa tra una curva e l'asse orizzontale (X) in un intervallo definito sull'asse stesso:

$$\Omega = \{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

l'intervallo $[a, b]$ può essere scomposto in n intervalli: $[a, b] = [x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ che individuano aree più piccole di Ω, la quale risulta dalla loro sommatoria: $\Omega = \Omega_1+\Omega_2+\ldots+\Omega_n$

$f(x)$ ammette su ciascun intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ un massimo M_i e un minimo m_i in base ai quali s'individuano le aree dei due rettangoli $S_i = M_i(x_i-x_{i-1})$ e $s_i = m_i(x_i-x_{i-1})$ cosicché $s_i \leq \Omega_i \leq S_i$
Somme superiori: $S_n = M_1\Delta x_1+ M_2\Delta x_2+\ldots+M_n\Delta x_n$

Somme inferiori: $s_n = m_1\Delta x_1+ m_2\Delta x_2+\ldots+m_n\Delta x_n$

$$s_n \leq \Omega_n \leq S_n$$

δ_n è la più grande delle differenze (M_1-m_1, …, M_n-m_n)

$S_n-s_n = (M_1-m_1)(x_1-x_0)+(M_2-m_2)(x_2-x_1)+\ldots+(M_n-m_n)(x_n-x_{n-1}) \rightarrow 0 \le S_n-s_n \le \delta_n(b-a)$

Se $x_i-x_{i-1} = 0 \rightarrow M_i-m_i = 0$

Suddividendo l'intervallo [a, b] in un numero n di intervalli, di uguale ampiezza $\delta x=\frac{(b-a)}{n}$, tendente a ∞, $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} s_n$, δ_n tende a 0 cosicché, essendo ξ_i un punto qualsiasi dell'intervallo [x_{i-1}, x_i]:

$$\bar{S}_n= f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$$

Quando $f(\xi_i) = M_i \rightarrow \bar{S}_n=S_n$ e quando $f(\xi_i) = m_i \rightarrow \bar{S}_n=s_n \rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$

$$\int_a^b f(x)\delta x=\int_a^{x_1} f(x)\delta x+\int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta x+...+\int_{b-1}^{b} f(x)\delta x$$

$\int f(x^n)\delta x=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ Es: $f(x) = 2 + 2x + x^2 \rightarrow \int f(x)\delta x=2\frac{x^{0+1}}{0+1}+2\frac{x^{1+1}}{1+1}+\frac{x^{2+1}}{2+1}=2x+x^2+\frac{x^3}{3}$ indefinito.

$\int_a^b f(x^n)\delta x=\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b \begin{matrix} \rightarrow & x=b \\ \rightarrow & x=a \end{matrix} \rightarrow f(b)-f(a)$ Es: $f(x) = 2 + 2x + x^2$

$$\int_1^5 f(x)\delta x=2x+x^2+\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^5 \begin{matrix} \rightarrow & x=5 & \rightarrow & 2(5)+5^2+\frac{5^3}{3}=60 \\ \rightarrow & x=1 & \rightarrow & 2(1)+1^2+\frac{1^3}{3}=\frac{10}{3} \end{matrix} \rightarrow 60-\frac{10}{3}=\frac{170}{3}$$ definito (1, 5).

TOPOLOGIA

INTERVALLO

$[m, M]$: in un insieme finito E, m è il minimo (il termine più piccolo), M è il massimo (il termine più grande), s è l'estremo superiore coincidente con M, i è l'estremo inferiore coincidente con m.

raggio

$[a - b]$ $a < b$ raggio: $\delta = \frac{b-a}{2}$ centro: $\epsilon = \frac{b+a}{2}$

a centro b

Intervallo limitato aperto: $a < x < b$

Intervallo limitato chiuso: $a \leq x \leq b$

Intervallo aperto a sinistra: $a < x \leq b$

Intervallo aperto a destra: $a \leq x < b$

INTORNO

$I(x_0)$: intorno completo di un punto (x_0) è un qualsiasi intervallo aperto contenente x_0.

$I(x_0-\delta, x_0+\delta)$: intorno circolare di un punto (x_0) è un intervallo aperto di centro x_0 con raggio δ.

Per ogni coppia di punti a e b esistono i relativi intorni senza punti in comune: $I_a \cap I_b = \Phi$

I_a I_b

a b

TANGENTE

$y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$: equazione della retta tangente un certo punto $P_0(x_0, y_0)$ della curva $y = f(x)$.

Es.: $y = 3x^2+x$, per $P_0(2, 14)$ $\rightarrow$ $y' = 3(2x)+1 = 6x+1$ $\rightarrow$ $y' = 12+1 = 13$ $\rightarrow$ $y-14 = 13(x-2)$

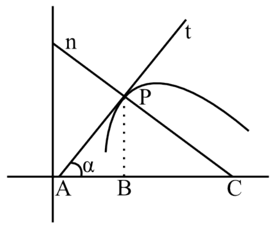
La normale con equazione $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ è la retta passante per P perpendicolare alla tangente.

Misura della tangente: $\overline{AP} = \sqrt{y_0^2 + [\frac{y_0}{y'(x_0)}]^2}$

Misura della sottotangente: $\overline{AB} = y_0 \cot \alpha = \frac{y_0}{\tan \alpha} = \frac{y_0}{y'(x_0)}$

Misura della normale: $\overline{PC} = \sqrt{y_0^2 + [y_{0y}'(x_0)]^2}$

Misura della sottonormale: $\overline{BC} = y_0 \tan \alpha = y_0 y'(x_0)$



DIAGONALE

Il numero delle diagonali (d) di un poligono di n vertici si calcola con la formula: $d = \frac{n(n-3)}{2}$

La diagonale di un rettangolo è: $d = \sqrt{b^2 + h^2}$ (dal teorema di Pitagora).

STATISTICA

PROBABILITÀ

Rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi (ugualmente) possibili: $p=\frac{C_f}{C_p}$

P.es. un lancio (1) di un dado a 6 facce estrae un numero qualsiasi da 1 a 6 con probabilità $\frac{1}{6}$.

VALORE ATTESO

Il valore atteso di una variabile casuale (*random*) è dato dalla somma di tutti i valori possibili che tale variabile può assumere, ciascuno moltiplicato per la probabilità di essere assunto (cioè di verificarsi).

P.es. il valore atteso dal lancio di un dado a 6 facce, con probabilità $\frac{1}{6}$ per ogni faccia, è:

$$(1+2+3+4+5+6)\frac{1}{6}=\frac{(1+2+3+4+5+6)}{6}=\frac{21}{6}=3{,}5$$

$$v = (G_v \cdot G_p)+(B_v \cdot B_p)$$

v: valore atteso
G_v: valore dell'azione
G_p: probabilità dell'azione
B_v: valore dell'azione non voluta
B_p: probabilità dell'azione non voluta

FATTORIALE

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ $\qquad 0! = 1$

Calcolo combinatorio, per n cifre [a, b, …, n] esistono $n!$ combinazioni senza ripetizioni di alcuna cifra.
[a, b, c] permutano 6 combinazioni: 1 [a, b, c], 2 [a, c, b], 3 [b, a, c], 4 [b, c, a], 5 [c, a, b], 6 [c, b, a].

COEFFICIENTE BINOMIALE

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ = numero dei gruppi di k elementi che si possono formare con n elementi.

$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{5040}{2(120)}=21$: da un gruppo di 7 elementi si possono formare 21 coppie.

COEFFICIENTE MULTINOMIALE

$\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}=\frac{n!}{k!\cdot\ldots\cdot k_r!}$ = numero di gruppi di diversi elementi (k_1, …, k_r) che si possono formare con n elementi.

$\binom{11}{1,4,4,2}=\frac{11!}{1!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2!}=\frac{39916800}{1\cdot 24\cdot 24\cdot 2}=34650$: le lettere della parola *MISSISSIPPI* (1*M*, 4*I*, 4*S*, 2*P*) possono essere combinate in 34.650 modi.

Distribuzioni statistiche

Distrib. semplici: *serie* (carattere qualitativo) e *seriazioni* (carattere quantitativo).

Frequenza assoluta: $\sum_{i=1}^{k} n_i = n_1+n_2+\ldots+n_k=N$: n_i è il numero di unità statistiche che rappresentano la modalità *i* di un certo carattere.

Frequenza relativa: $f_i=\frac{n_i}{N}$ è il rapporto tra la frequenza assoluta n_i e il totale N: $\sum_{i=1}^{k} f_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{N}=\frac{n_1}{N}+\frac{n_2}{N}+\ldots+\frac{n_k}{N}=1$

Divisione di una variabile in classi

Estremi (*min*, *max*): i valori numerici che indicano le classi (p. es. da 45 a 50, da 132 a 133).

Limiti o confini (inferiore e superiore): semisomma fra *max* di una classe e *min* della classe successiva (se c'è discontinuità tra gli estremi delle classi) $c.sup_i=\frac{max_{i-1}+min_i}{2}$, $c.inf_i=\frac{max_i+min_{i+1}}{2}$

Ampiezza: differenza tra limite superiore e inferiore (*lim.sup–lim.inf*).

Valore centrale: semisomma tra limite inferiore e superiore $\frac{lim.sup_i+lim.inf_i}{2}$

Media

Media aritmetica: per le modalità x_N di N unità statistiche, $M_a=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_N}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

per le frequenze n di x, $M_a=\frac{x_1 n_1+x_2 n_2+\ldots+x_k n_k}{N}$

$x_1 \le M_a \le x_N$

Media aritmetica ponderata: $M_{a,pond}=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot f_i}{\sum_{i=1}^{N} f_i}$, f_i è il *peso* (ponderazione) assegnato alle modalità.

Media geometrica: $M_g=\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i}$ i valori non si sommano, si moltiplicano (tassi di crescita).

Media geometrica ponderata: $M_{g,pond}=\sqrt[\sum_{i=1}^{N} f_i]{\prod_{i=1}^{N} x_i^{f_i}}$

Media armonica: $$M_h = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}}$$

Media di potenza: $$M^s = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

SCARTI

Differenza tra modalità e media: $s_i = (x_i - M_a)$

La somma degli scarti è nulla: $s_N = (x_1 - M_a) + (x_2 - Ma) + \ldots + (x_N - M_a) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M_a) = 0$

$M_a = \frac{5+7+8+4}{4} = 6$ → $s_1 = 5–6 = –1$; $s_2 = 7–6 = 1$; $s_3 = 8–6 = 2$; $s_4 = 4–6 = –2$ → $s_1+s_2+s_3+s_4 = 1–1+2–2 = 0$

VARIANZA

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - M_a)^2 + (x_2 - Ma)^2 + \ldots + (x_N - M_a)^2}$$

σ è l'indice di dispersione che esprime la varianza generale delle modalità dalla M_a, cioè quanto si discosta mediamente la sommatoria degli scarti dalla M_a. Più il valore di σ è elevato, più il divario degli estremi, rispetto alla M_a, è notevole.
Visto che la somma degli scarti è nulla, per ottenere un valore di riferimento (σ^2) si elevano gli scarti al quadrato, in modo che siano tutti positivi; si opera quindi la radice quadrata per ottenere un numero gestibile.